CAPITOLO 5

Flock parziali ellittici e piani di traslazione derivati da piani di Desarguesiani

Sia P_E un flock parziale ellittico in $PG(3,q)$ (E indica una quadrica ellittica. Usando la corrispondenza di Klein per E nella quadrica di Klein, si ottiene una fibrazione di un piano Desarguesiano Σ. Con la costruzione di Thas-Walker, una conica di P_E corrisponde ad un regolo opposto ad un regolo di Σ e siffatti regoli hanno a due a due intersezione vuota. Derivando quest'insieme di regoli si ottiene un piano di traslazione che corrisponde a P_E.

NOTA 5.1. *I flock parziale ellittici con t coniche sono equivalenti ai piani di traslazione che possono essere costruiti dalla derivazione di t regoli di un piano Desarguesiano.*
Anche una quadrica ellittica in $PG(3,q)$ può essere considerata come un piano inversivo di Miquel $M(q)$ dove le coniche sono i cerchi in $M(q)$.

Per i flock ellittici, abbiamo il teorema di Orr-Thas:

TEOREMA 5.2. (Orr [**114**] per q dispari, Thas [**136**] per q pari).

Ogni flock ellittico in $PG(3,q)$ è lineare e quindi il piano corrispondente è Desarguesiano.

Per i flock iperbolici e conici ci sono descrizioni che usano gli insiemi di regoli. Invece una fibrazione in $PG(3,q)$ che contiene $q-1$ regoli a due a due disgiunti non sempre produce a un flock ellittico. Per esempio:

TEOREMA 5.3. (Jha-Johnson [**47**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 il cui nucleo contiene $K \cong GF(q)$. Se π ammette un gruppo ciclico di omologie H di ordine $q+1$ e L è una componente di π che non è fissata da H allora LH è un regolo in $PG(3, K)$. Dunque, ci sono $q-1$ regoli nella fibrazione di π.

Un problema é trovare una condizione geometrica per stabilire quando un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ produce a un flock parziale ellittico.
Un flock parziale ellittico in $PG(3, q)$ con $q-2$ coniche non puó essere esteso a un flock se il piano corrispondente non è nè Desarguesiano nè di Hall. Orr [**114**] ha trovato un'esempio di un flock parziale ellittico in $PG(3, 9)$ che non può essere esteso a un flock.
É piuttosto difficile ottenere esempi di tali flock parziali. Quindi un problema é trovare alcune condizioni di esistenza. Un altro problema legato a questo è quello di determinare i piani di traslazione che ammettono $q-1$ regoli a due a due disgiunti e che ammettono un gruppo G di collineazioni di ordine q^2-1 che fissa l'insieme dei regoli e le orbite non-banali dei punti che hanno lunghezza q^2-1.
Nel caso generale, per un gruppo lineare G di ordine q^2-1, sia K^* il gruppo delle omologie di ordine $q-1$ di determinato dal nucleo, se $G \cap K^* =< 1 >$ e G è abeliano, R. Figueroa ha determinato completemente le varie possibilitá [**94**]. Un risultato simile è il seguente:

Teorema 5.4. (si veda anche Ostrom (5.8)[**116**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo contenente $K \cong GF(q)$. Se G è un gruppo di collineazioni di ordine q^2-1 di π nel complemento lineare tale che ogni orbita unita lo zero forma un K-sottospazio, allora π è un piano che corrisponde ad un flock parziale ellittico.

Dimostrazione (Gli argomenti usati sono dovuti ad Ostrom):
Le orbite danno luogo ad una fibrazione π'; cioè, ad un piano di traslazione π' di ordine q^2 con nucleo contenente K. Il gruppo G di ordine q^2-1 opera sul piano π'. Sia W una componente di π. Se W non è una componente di π' allora W deve essere un sottopiano di Baer di π'. L'insieme delle componenti della rete di grado $q+1$ di π' che contiene W é un regolo in $PG(3, K)$ fissato da G. Poichè G è un gruppo di collineazioni di π, allora π deve corrispondere a un flock parziale ellittico.
In (5.4), se le orbite di G sono solo sottospazi invece di K-sottospazi, il risultato non è più vero. Infatti, sia $F \cong GF(h^{2m})$. Prediamo σ :

$x \to x^h$, e consideriamo la fibrazione di Andrè: $x = O$, $y = x^{\sigma^{(j \cdot m+1)}} s$ dove $s^{1+\sigma+\sigma^2+\ldots+\sigma^{2m-1}} = \alpha_j \in GF(h)$. Il gruppo $K^* =:< (x,y) \to (ax,\ a^\sigma y) | a \in GF(h^m) >$ opera sulla fibrazione fissandone ogni componente perchè $a^{\sigma^{(j \cdot m+1)}} = a^\sigma$ con $a \in GF(h^m)$. Si noti che K^* è il nucleo del piano se ci sono almeno due scelte differenti per j. Anche, il gruppo $G =:< (x,y) \to (\alpha x, \alpha y) | \alpha \in\ F >$ agisce sulla fibrazione perchè

$$y = x^{\sigma^{(j \cdot m+1)}} s \to y = x^{\sigma^{(j \cdot m+1)}} s\ \alpha^{1-\sigma^{(j \cdot m+1)}}$$

e $(\alpha^{(1-\sigma^{(j \cdot m+1)})(1+\sigma+\sigma^2+\ldots+\sigma^{2m-1})} = 1$.

G opera sul piano π con questa fibrazione ma le orbite sono: $x = O$, $y = x\ s$ con $s \in F$ e $y = x\ s$ con $s \neq 0$ non fissato da $\hat{K}$. Allora, abbiamo un piano con fibrazione in $PG(3,q)$, $q = h^m$, h prime. Tuttavia non è possibile usare le orbite di G per costruire un'altro piano che corrisponda ad un flock ellitico.

Nei Capitoli 12 e 14, ritorneremo sui gruppi di ordine $q^2 - 1$.